绝密 ★ 启用前

2018 年普通高等学校招生全国统一考试

文 科 数 学（二）

注意事项：

1、答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2、回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3、考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

第 I 卷

一、选择题：共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\middle|x^2-3x-4\le 0\right\}$，$B=\left\{x\middle|0<\ln x<2\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{1,2,3,4\}$　　B．$\{3,4\}$　　C．$\{2,3,4\}$　　D．$\{-1,0,1,2,3,4\}$

【答案】C

【解析】$A=\left\{x\in\mathbf{Z}\middle|x^2-3x-4\le 0\right\}=\left\{x\in\mathbf{Z}\middle|-1\le x\le 4\right\}=\{-1,0,1,2,3,4\}$，

$B=\left\{x\middle|0<\ln x<2\right\}=\left\{x\middle|1<x<\mathrm{e}^2\right\}$，所以 $A\cap B=\{2,3,4\}$．

2．设复数 $z=1-\sqrt{2}\mathrm{i}$（i 是虚数单位），则 $\left|z+\overline{z}\right|$ 的值为（　　）

A．$3\sqrt{2}$　　B．2　　C．1　　D．$2\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】$z+\overline{z}=2$，$\left|z+\overline{z}\right|=2$．

3．“$p\wedge q$ 为假”是“$p\vee q$ 为假”的（　　）条件．

A．充分不必要　　B．必要不充分　　C．充要　　D．既不充分也不必要

【答案】B

【解析】由“$p\wedge q$ 为假”得出 p，q 中至少一个为假．当 p，q 为一假一真时，$p\vee q$ 为真，故不充分；当“$p\vee q$ 为假”时，p，q 同时为假，所以 $p\wedge q$ 为假，所以是必要的，所以选 B．

4．已知实数x，y满足约束条件$\begin{cases}x\le 2\\ x-2y+2\ge 0\\ x+y+2\ge 0\end{cases}$，则$z=-\frac{x}{3}+y$的最大值为（　　）

A．$-\frac{14}{3}$　　　　B．-2　　　　C．$\frac{4}{3}$　　　　D．4

【答案】C

【解析】作出的可行域为三角形（包括边界），把$z=-\frac{x}{3}+y$改写为$y=\frac{x}{3}+z$，当且仅当动直线$y=\frac{x}{3}+z$过点$(2,2)$时，z取得最大值为$\frac{4}{3}$．

5．据有关文献记载：我国古代一座9层塔共挂了126盏灯，且相邻两层中的下一层灯数比上一层灯数都多n（n为常数）盏，底层的灯数是顶层的13倍，则塔的底层共有灯（　　）盏．

A．2　　　　B．3　　　　C．26　　　　D．27

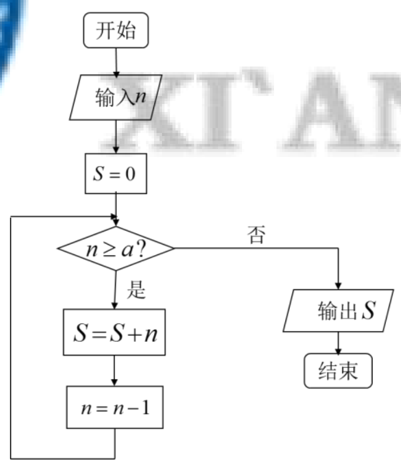
【答案】C

【解析】设顶层有灯a_1盏，底层共有a_9盏，由已知得，则$\begin{cases}a_9=13a_1\\ \frac{9(a_9+a_1)}{2}=126\end{cases}\Rightarrow a_9=26$，

所以选C．

6．如图是一个算法流程图，若输入n的值是13，输出S的值是46，则a的值可以是（　　）

A．8　　　　B．9　　　　C．10　　　　D．11



【答案】C

【解析】依次运行流程图，结果如下：$S=13$，$n=12$；$S=25$，$n=11$；$S=36$，$n=10$；$S=46$，$n=9$，此时退出循环，所以a的值可以取10．故选C．

7．设双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线互相垂直，顶点到一条渐近线的距离为1，则双曲线的一个焦点到一条渐近线的距离为（　　）

A．2　　　　B．$\sqrt{2}$　　　　C．$2\sqrt{2}$　　　　D．4

【答案】B

【解析】因为双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的两条渐近线互相垂直，所以渐近线方程为$y=\pm x$，所以$a=b$．因为顶点到一条渐近线的距离为1，所以$\frac{\sqrt{2}}{2}a=1$，所以$a=b=\sqrt{2}$，双曲线$C$的方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$，所以双曲线的一个焦点到一条渐近线的距离为$b=\sqrt{2}$．

8．已知数据x_1，x_2，$\cdots$，x_{10}，2的平均值为2，方差为1，则数据x_1，x_2，$\cdots$，x_{10}相对于原数据（　　）

A．一样稳定　　　　B．变得比较稳定　　　　C．变得比较不稳定　　　　D．稳定性不可以判断

【答案】C

【解析】因为数据x_1，x_2，$\cdots$，x_{10}，2的平均值为2，所以数据x_1，x_2，$\cdots$，x_{10}的平均值也为2，因为数据x_1，x_2，$\cdots$，x_{10}，2的方差为1，所以$\frac{1}{11}\left[\sum_{i=1}^{10}(x_i-2)^2+(2-2)^2\right]=1$，所以$\sum_{i=1}^{10}(x_i-2)^2=11$，所以数据$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_{10}$的方差为$\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-2)^2=1.1$，因为$1.1>1$，所以数据$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_{10}$相对于原数据变得比较不稳定．

9．设a_n表示正整数n的所有因数中最大的奇数与最小的奇数的等差中项，数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，那么$S_{2^n-1}=$（　　）

A．$2^{n+1}-n-2$　　　　B．$2^{n-1}+\frac{2}{3}\cdot 4^{n-1}-\frac{2}{3}$　　　　C．2^n-n　　　　D．2^n+n-2

【答案】B

【解析】由已知得，当n为偶数时，$a_n=a_{\frac{n}{2}}$，当n为奇数时，$a_n=\frac{1+n}{2}$．

因为$S_{2^n-1}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2^n-1}$，

所以

$S_{2^{n+1}-1}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2^{n+1}-1}=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2^{n+1}-1})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2^{n+1}-2})$

$=\left(\frac{1+1}{2}+\frac{1+3}{2}+\frac{1+5}{2}+\cdots+\frac{1+2^{n+1}-1}{2}\right)+(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2^n-1})$

$=\left(1+2+3+\cdots+2^{n}\right)+\left(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2^{n}-1}\right)=\dfrac{\left(1+2^{n}\right)2^{n}}{2}+S_{2^{n}-1}=\dfrac{1}{2}\left(2^{n}+4^{n}\right)+S_{2^{n}-1}$，

即 $S_{2^{n+1}-1}=\dfrac{1}{2}\left(2^{n}+4^{n}\right)+S_{2^{n}-1}$，

所以 $S_{2^{n}-1}=\dfrac{1}{2}\left(4^{n-1}+2^{n-1}\right)+\dfrac{1}{2}\left(4^{n-2}+2^{n-2}\right)+\cdots+\dfrac{1}{2}\left(4^{1}+2^{1}\right)+S_{2^{1}-1}=2^{n-1}+\dfrac{2}{3}\cdot4^{n-1}-\dfrac{2}{3}$.

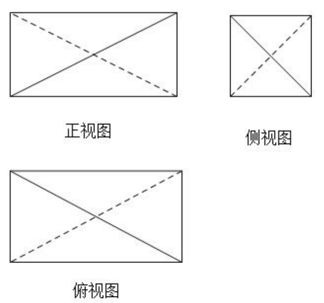
10．过抛物线 $y^2=mx\ (m>0)$ 的焦点作直线交抛物线于 P，Q 两点，若线段 PQ 中点的横坐标为 3，$|PQ|=\dfrac{5}{4}m$，则 $m=$（　　）

A．4　　　　B．6　　　　C．8　　　　D．10

【答案】C

【解析】因为 $y^2=mx$，所以焦点到准线的距离 $p=\dfrac{m}{2}$，设 P，Q 的横坐标分别是 x_1，x_2，则 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=3$，$x_1+x_2=6$，因为 $|PQ|=\dfrac{5}{4}m$，所以 $x_1+x_2+p=\dfrac{5}{4}m$，即 $6+\dfrac{m}{2}=\dfrac{5}{4}m$，解得 $m=8$.

11．已知一个三棱锥的三视图如图所示，其中三视图的长、宽、高分别为 2，1，$\dfrac{1}{2}$，则此三棱锥外接球的表面积为（　　）



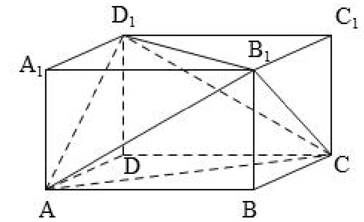
A．$\dfrac{17}{4}\pi$　　　　B．$\dfrac{21}{4}\pi$　　　　C．4π　　　　D．5π

【答案】B

【解析】由已知条件及三视图得，此三棱锥的四个顶点位于长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的四个顶点，即为三棱锥 $A-CB_1D_1$，且长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的长、宽、高分别为 2，1，$\dfrac{1}{2}$，

所以此三棱锥的外接球即为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球，半径 $R=\dfrac{\sqrt{2^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{21}}{4}$，

所以三棱锥外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi\left(\dfrac{\sqrt{21}}{4}\right)^2=\dfrac{21\pi}{4}$.



12．已知点 P 是曲线 $y=\sin x+\ln x$ 上任意一点，记直线 OP（O 为坐标系原点）的斜率为 k，则下列一定成立的为（　　）

A．$k<-1$　　　　B．$k<0$　　　　C．$k<1$　　　　D．$k\geq1$

【答案】C

【解析】任意取 x 为一正实数，一方面 $y=\sin x+\ln x\leq\ln x+1$，另一方面容易证 $\ln x+1\leq x$ 成立，所以 $y=\sin x+\ln x\leq x$，因为 $y=\sin x+\ln x\leq\ln x+1$ 与 $\ln x+1\leq x$ 中两个等号成立条件不一样，所以 $y=\sin x+\ln x<x$ 恒成立，所以 $k<1$，所以排除 D；当 $\dfrac{\pi}{2}\leq x<\pi$ 时，$y=\sin x+\ln x>0$，所以 $k>0$，所以排除 A，B．所以选 C.

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第(13)~(21)题为必考题，每个试题考生都必须作答。第(22)~(23)题为选考题，考生根据要求作答。

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知 $\boldsymbol{a}=(1,2m-1)$，$\boldsymbol{b}=(2-m,-2)$，若向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则实数 m 的值为________.

【答案】$m=0$ 或 $m=\dfrac{5}{2}$

【解析】因为向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $\dfrac{1}{2m-1}=\dfrac{2-m}{-2}$，所以 $m=0$ 或 $m=\dfrac{5}{2}$.

14．从正五边形的对角线中任意取出两条，则取出的两条对角线为同一个等腰三角形的两腰的概率为________.

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】从 5 条对角线中任意取出 2 条，共有 10 个基本事件，其中取出的两条对角线为某一个等腰三角形的两腰有 5 个，所以取出的两条对角线为图中同一个等腰三角形的两腰的概率为 $\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$.

15．设函数 $f(x)=x\sqrt{a-x^2}-\frac{1}{2}$ 对于任意 $x\in[-1,1]$，都有 $f(x)\le 0$ 成立，则实数 $a=$________.

【答案】1

【解析】一方面，由 $a-x^2\ge 0$ 对任意 $x\in[-1,1]$ 恒成立得 $a\ge 1$；另一方面，由

$f(x)=x\sqrt{a-x^2}-\frac{1}{2}\le\frac{x^2+a-x^2}{2}-\frac{1}{2}\le 0$ 得 $a\le 1$，所以 $a=1$.

16. 若对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)=f(x-\frac{\pi}{6})+f(x+\frac{\pi}{6})$，且 $f(0)=-1$，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$，则 $f\left(\frac{100\pi}{3}\right)$ 的值为________.

【答案】2

【解析】因为 $f(x)=f(x-\frac{\pi}{6})+f(x+\frac{\pi}{6})$①，所以 $f(x+\frac{\pi}{6})=f(x)+f(x+\frac{\pi}{3})$②，

①+②得，$f(x+\frac{\pi}{3})=-f(x-\frac{\pi}{6})$，所以 $f(x+\frac{\pi}{2})=-f(x)$，

所以 $f(x+\pi)=f(x)$，所以 $T=\pi$，所以 $f\left(\frac{100\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，

在 $f(x)=f(x-\frac{\pi}{6})+f(x+\frac{\pi}{6})$ 中，令 $x=\frac{\pi}{6}$ 得，$f(\frac{\pi}{6})=f(0)+f(\frac{\pi}{3})$，

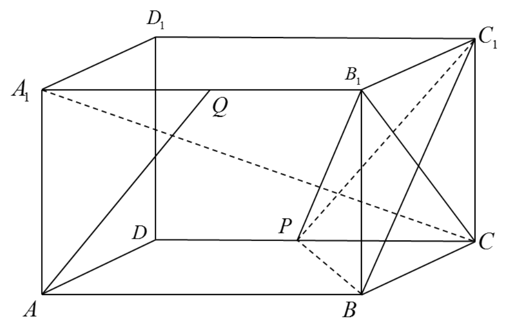
因为 $f(0)=-1$，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$，所以 $f(\frac{\pi}{3})=2$.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（12 分）如图，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为长方体，点 P 是 CD 中点，Q 是 A_1B_1 的中点.

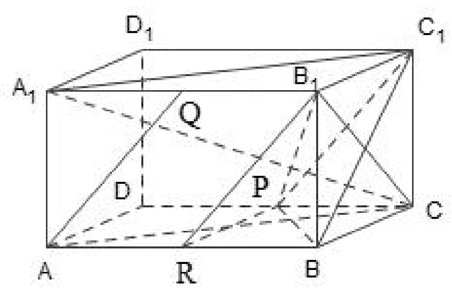
（1）求证：$AQ//$ 平面 PB_1C_1；

（2）若 $BC=CC_1$，求证：平面 $A_1B_1C\perp$ 平面 PBC_1.



【答案】（1）见解析；（2）见解析.

【解析】（1）取 AB 得中点为 R，连接 PR，B_1R.



由已知点 P 是 CD 中点，Q 是 A_1B_1 的中点可以证得，

四边形 AQB_1R，PRB_1C_1 都为平行四边形，……2 分

所以 $AQ//B_1R$，$B_1R//PC_1$，所以 $AQ//PC_1$，……4 分

因为 $AQ\not\subset$ 平面 PB_1C_1，$PC_1\subset$ 平面 PB_1C_1，

所以 $AQ//$ 平面 PB_1C_1．……6 分

（2）因为四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为长方体，$BC=CC_1$，所以 $B_1C\perp BC_1$，……7 分

因为 $A_1B_1\perp$ 平面 BB_1C_1C，所以 $A_1B_1\perp BC_1$，……8 分

因为 $A_1B_1\cap B_1C=B_1$，所以 $BC_1\perp$ 平面 A_1B_1C，……10 分

$BC_1\subset$ 平面 PBC_1，所以平面 $A_1B_1C\perp$ 平面 PBC_1．……12 分

18．（12 分）在 $\triangle ABC$ 中，$D\in BC$，$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}=\lambda$.

（1）求证：AD 平分 $\angle BAC$；

（2）当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，若 $AD=1$，$DC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 BD 和 AC 的长.

【答案】（1）见解析；（2）$BD=\sqrt{2}$，$AC=1$.

【解析】（1）在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得，$\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}=\frac{AC}{AB}$，

因为 $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}$，……2 分

所以 $\dfrac{\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin\angle CAD}{\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD}=\frac{AC}{AB}$，……3 分

所以 $\sin\angle CAD=\sin\angle BAD$，……4 分

因为 $\angle CAD+\angle BAD<\pi$，所以 $\angle CAD=\angle BAD$，

即 AD 平分 $\angle BAC$．……6 分

（2）因为 $\frac{1}{2}=\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{CD}{BD}$，$DC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $BD=\sqrt{2}$，……7 分

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理得，$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB$，

$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC\cos\angle ADC$，

因为$\cos\angle ADB + \cos\angle ADC = 0$，所以$AB^2 + 2AC^2 = 3AD^2 + BD^2 + 2DC^2$，

因为$AD = 1$，所以$AB^2 + 2AC^2 = 6$，……10 分

因为$\dfrac{\sin\angle B}{\sin\angle C} = \dfrac{1}{2}$，所以$AB = 2AC$，……11 分

所以$AC = 1$．……12 分

19．（12 分）国家放开计划生育政策，鼓励一对夫妇生育 2 个孩子．在某地区的 100000 对已经生育了一胎夫妇中，进行大数据统计得，有 100 对第一胎生育的是双胞胎或多胞胎，其余的均为单胞胎．在这 99900 对恰好生育一孩的夫妇中，男方、女方都愿意生育二孩的有 50000 对，男方愿意生育二孩女方不愿意生育二孩的有x_1对，男方不愿意生育二孩女方愿意生育二孩的有x_2对，其余情形有x_3对，且$x_1 : x_2 : x_3 = 300 : 100 : 99$．现在用样本的频率来估计总体的频率．

（1）说明“其余情形”指何种具体情形，并求出x_1，x_2，x_3的值；

（2）该地区为进一步鼓励生育二孩，实行贴补政策：凡第一胎生育了一孩的夫妇一次性贴补 5000 元，第一胎生育了双胞胎或多胞胎的夫妇只有一次性贴补 15000 元．第一胎已经生育了一孩再生育了二孩的夫妇一次性再贴补 20000 元．这种补贴政策直接提高了夫妇生育二孩的积极性：原先男方或女方中只有一方愿意生育二孩的夫妇现在都愿意生育二孩，但原先男方、女方都不愿意生育二孩的夫妇仍然不愿意生育二孩．试用样本估计该地区任意一对已经生育了一胎的夫妇获得 5000 元生育补助、15000 元生育补助及 25000 元生育补助的概率．

【答案】（1）“其余情形”指一对夫妇中的男方、女方都不愿意生育二孩；$x_1 = 30000$，$x_2 = 10000$，$x_3 = 9900$；（2）任意一对已经生育了一胎的夫妇获得 15000 元生育补助的概率为$\dfrac{1}{1000}$，获得 25000 元生育补助的概率为$\dfrac{9}{10}$，获得 5000 元生育补助的概率为$\dfrac{99}{1000}$．

【解析】（1）“其余情形”指一对夫妇中的男方、女方都不愿意生育二孩．

由$x_1 : x_2 : x_3 = 300 : 100 : 99$，可设$x_1 = 300n$，$x_2 = 100n$，$x_3 = 99n\left(n \in \mathbf{N}\right)$，

由已知得，$x_1 + x_2 + x_3 = 49900$，所以$300n + 100n + 99n = 49900$，

解得$n = 100$，……2 分

所以$x_1 = 30000$，$x_2 = 10000$，$x_3 = 9900$．……4 分

（2）一对夫妇中，原先的生育情况有以下 5 种：

第一胎生育的是双胞胎或多胞胎有 100 对，频率为$\dfrac{100}{100000} = \dfrac{1}{1000}$，……5 分

男方、女方都愿意生育二孩的有 50000 对，频率为$\dfrac{50000}{100000} = \dfrac{1}{2}$，……6 分

男方愿意生育二胎女方不愿意生育二胎的有 30000 对，频率为$\dfrac{30000}{100000} = \dfrac{3}{10}$，……7 分

男方不愿意生育二胎女方愿意生育二胎的也有 10000 对，频率为$\dfrac{10000}{100000} = \dfrac{1}{10}$，……8 分

其余情形即男方、女方都不愿意生育二孩的有 9900 对，频率为$\dfrac{9900}{100000} = \dfrac{99}{1000}$，……9 分

根据统计学原理，可以用这 100000 对已经生育了一胎的夫妇获得的生育补助频率来估计该地区任意一对已经生育了一胎的夫妇获得的生育补助的概率，故可以估计如下：

任意一对已经生育了一胎的夫妇获得 15000 元生育补助的概率为$\dfrac{1}{1000}$，……10 分

任意一对已经生育了一胎的夫妇获得 25000 元生育补助的概率为$\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10}$，……11 分

任意一对已经生育了一胎的夫妇获得 5000 元生育补助的概率为$\dfrac{99}{1000}$．……12 分

20．（12 分）已知椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\left(a > b > 0\right)$，$P\left(1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$在椭圆上，椭圆的左顶点为$A$，左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，$\triangle PAF_1$的面积是$\triangle POF_2$的面积的$\sqrt{2} - 1$倍．

（1）求椭圆C的方程；

（2）过$Q\left(2, 0\right)$的直线l与椭圆C交于M，N，求$\triangle F_1MN$的面积的取值范围．

【答案】（1）椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$；（2）$S_{\triangle F_1MN} \in \left(0, \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right]$．

【解析】（1）由$P\left(1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$在椭圆上，可得$\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{2b^2} = 1$，……1 分

由$\triangle PAF_1$的面积是$\triangle POF_2$的面积的$\sqrt{2} - 1$倍，可得$\dfrac{a-c}{c} = \sqrt{2} - 1$，即$a = \sqrt{2}c$，……2 分

又$a^2 = b^2 + c^2$，可得$a = \sqrt{2}$，$b = 1$，$c = 1$，

所以椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$．……4 分

（2）由题意可知直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$，

联立得 $\begin{cases} y=k(x-2) \\ x^2+2y^2=2 \end{cases}$，消去 y 得 $(2k^2+1)x^2-8k^2x+8k^2-2=0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，所以 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{8k^2-2}{2k^2+1}$，……5 分

又 $\varDelta>0$，$(-8k^2)^2-4(2k^2+1)(8k^2-2)>0$，解得：$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<k<\dfrac{\sqrt{2}}{2}(k\neq 0)$，……6 分

$|MN|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(\dfrac{8k^2}{2k^2+1}\right)^2-4\cdot\dfrac{8k^2-2}{2k^2+1}}=\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{(1+k^2)(-2k^2+1)}}{2k^2+1}$，……8 分

F_1 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}}$，……9 分

$S_{\triangle F_1MN}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{(1+k^2)(-2k^2+1)}}{2k^2+1}\cdot\dfrac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}}=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{k^2(-2k^2+1)}{(2k^2+1)^2}}$

$=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{-2k^4+k^2}{(2k^2+1)^2}}=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{-\frac{1}{2}(2k^2+1)^2+\frac{3}{2}(2k^2+1)-1}{(2k^2+1)^2}}$

$=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{-\dfrac{1}{(2k^2+1)^2}+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{(2k^2+1)}-\dfrac{1}{2}}$，……10 分

令 $t=\dfrac{1}{2k^2+1}$，由 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<k<\dfrac{\sqrt{2}}{2}(k\neq 0)$，所以 $\dfrac{1}{2}<t<1$，

则 $S_{\triangle F_1MN}=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{-t^2+\dfrac{3}{2}t-\dfrac{1}{2}}$，$\left(\dfrac{1}{2}<t<1\right)$，

所以 $S_{\triangle F_1MN}\in\left(0,\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right]$．……12 分

21．（12 分）设函数 $f(x)=x^2-a(\ln x+1)(a>0)$．

（1）证明：当 $a\leq\dfrac{2}{e}$ 时，$f(x)\geq 0$；

（2）若对任意的 $x\in(1,e)$，都有 $f(x)\leq x$，求 a 的取值范围．

【答案】（1）见解析；（2）$a\in\left[\dfrac{e^2-e}{2},+\infty\right)$．

【解析】（1）函数的定义域为 $(0,+\infty)$，令 $f'(x)=2x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2-a}{x}=0$，则 $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$，……1 分

所以当 $x\in\left(0,\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，……2 分

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)=-\dfrac{a}{2}\left(\ln\dfrac{a}{2}+1\right)$，……3 分

当 $0<a\leq\dfrac{2}{e}$ 时，$\ln\dfrac{a}{2}+1\leq\ln\dfrac{1}{e}+1=0$，所以 $f\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)=-\dfrac{a}{2}\left(\ln\dfrac{a}{2}+1\right)\geq 0$，

所以 $f(x)\geq 0$ 成立．……4 分

（2）$f(x)\leqslant x$，即 $x^2-x-a(\ln x+1)<0$，

令 $g(x)=x^2-x-a\ln x-a$，$x\in(1,e)$，$g'(x)=2x-1-\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2-x-a}{x}$，……5 分

令 $g'(x)=0$，得 $2x^2-x-a=0$，$x=\dfrac{1-\sqrt{1+8a}}{2}<0$（舍去），或 $x=\dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{2}>1$，……6 分

所以，当 $x\in\left(0,\dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{2}\right)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in\left(\dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{2},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$；

即当 $x\in\left(0,\dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{2}\right)$ 时，$g(x)$ 递减；当 $x\in\left(\dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{2},+\infty\right)$ 时，$g(x)$ 递增；……7 分

①当 $e\leq\dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{2}$ 时，即 $a\geq\dfrac{e^2-e}{2}$，$g(x)$ 在 $(1,e)$ 上递减，

所以 $g(x)<g(1)=-a<0$，故 $g(x)<0$ 恒成立，符合题意．……9 分

②当 $e>\dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{2}$ 时，即 $0<a<\dfrac{e^2-e}{2}$，

当 $x\in\left(1,\dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{2}\right)$ 时，$g(x)$ 递减；当 $x\in\left(\dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{2},e\right)$ 时，$g(x)$ 递增；

$\begin{cases} g(1)\leq 0 \\ g(e)\leq 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -a\leq 0 \\ e^2-e-2a\leq 0 \end{cases}\Rightarrow a\geq\dfrac{e^2-e}{2}$ 与 $0<a<\dfrac{e^2-e}{2}$ 矛盾，故舍去．……11 分

综上所述，$a\in\left[\dfrac{e^2-e}{2},+\infty\right)$．……12 分

请考生在 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分。

【选修 4-4：坐标系与参数方程】

22.（10 分）在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程是 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），以射线 Ox 为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-\sqrt{3}=0$．

（1）将曲线 C 的参数方程化成普通方程，将直线 l 的极坐标方程化成直角坐标方程；

（2）求直线 l 与曲线 C 相交所得的弦 AB 的长．

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，$x-y-\sqrt{3}=0$；（2）$\dfrac{8\sqrt{6}}{7}$．

【解析】（1）曲线 C 的参数方程化成直角坐标方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，……2 分

因为 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，所以 l 的直角坐标方程为 $x-y-\sqrt{3}=0$．……4 分

（2）直线 l 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$，过点 $(\sqrt{3},0)$，

所以直线 l 化成参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}+t\cos\dfrac{\pi}{4}\\ y=t\sin\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$，即 $\begin{cases}x=\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$，（$t$ 为参数），……5 分

代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 得，$7t^2+6\sqrt{6}t-6=0$，……6 分

$\Delta=(6\sqrt{6})^2-4\times7\times(-6)=384>0$，

设方程的两根是 t_1，t_2，则 $t_1+t_2=-\dfrac{6\sqrt{6}}{7}$，$t_1t_2=-\dfrac{6}{7}$，……8 分

所以 $AB=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\dfrac{\sqrt{384}}{7}=\dfrac{8\sqrt{6}}{7}$．……10 分

【选修 4-5：不等式选讲】

23.（10 分）已知函数 $f(x)=|x+1-2a|+|x-a^2|$（a 为正实数），$g(x)=x^2-2x-4+\dfrac{4}{(x-1)^2}$．

（1）若 $f(2a^2-1)>4|a-1|$，求实数 a 的取值范围；

（2）若存在实数 x，y，使 $f(x)+g(y)\le0$，求实数 a 的取值范围．

【答案】（1）$(1,+\infty)$；（2）$(0,2]$．

【解析】（1）$\because f(2a^2-1)>4|a-1|$，$\therefore |2a^2-2a|+|a^2-1|>4|a-1|$，

$\therefore |a-1|(|2a|+|a+1|)>4|a-1|$，$\therefore |2a|+|a+1|>4$ 且 $a\ne1$，……2 分

因为 $a>0$，所以 $2a+a+1>4$ 且 $a\ne1$，$\therefore a>1$，所以 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$．……4 分

（2）$\because g(x)=(x-1)^2+\dfrac{4}{(x-1)^2}-5\ge2\sqrt{(x-1)^2\cdot\dfrac{4}{(x-1)^2}}-5=-1$，显然可取等号，

$\therefore g(x)_{\min}=-1$，……6 分

所以若存在实数 x，y，使 $f(x)+g(y)\le0$，只需使 $f(x)_{\min}\le1$，……8 分

又 $f(x)=|x+1-2a|+|x-a^2|\ge|(x+1-2a)-(x-a^2)|=(a-1)^2$，

$\therefore (a-1)^2\le1$，$\therefore -1\le a-1\le1$，因为 $a>0$，所以实数 a 的取值范围是 $(0,2]$．……10 分