

2019 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学答案(二)

1. 【答案】D

【解析】由集合 $A = \{x | \log_2(x-1) < 0\} = \{x | 1 < x < 2\}$ ，则 $C_R A = \{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$ 。

2. 【答案】D

【解析】 $\because (2+3i)z = 13$ ， $\therefore z = \frac{13}{2+3i} = \frac{13(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = 2-3i$ ，

则复平面内表示 z 的点 $(2, -3)$ 位于第四象限。

3. 【答案】C

【解析】函数 $f(x) = \frac{1}{2}e^{|x|} - |x| - \frac{1}{2}$ 是偶函数，排除选项 B；

当 $x > 0$ 时，函数 $f(x) = \frac{1}{2}e^x - x - \frac{1}{2}$ ，可得 $f'(x) = \frac{1}{2}e^x - 1$ ，

当 $0 < x < \ln 2$ 时， $f'(x) < 0$ ，函数是减函数，

当 $x > \ln 2$ 时，函数是增函数，排除选项 A，D，故选 C。

4. 【答案】A

【解析】 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$ ， $\overrightarrow{AC} = (3, \lambda)$ ， $\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (2, \lambda - 2)$ ，

又 $\angle B = 90^\circ$ ， $\therefore \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ ， $\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ，即 $2 + 2(\lambda - 2) = 0$ ，解得 $\lambda = 1$ 。

5. 【答案】D

【解析】由 $(a+b-c)(a+c+b) = 2ab$ ，可得 $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ ，

根据余弦定理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 0$ ，

$\because B \in (0, \pi)$ ， $\therefore \sin C = 1$ 。

6. 【答案】C

【解析】 \because 双曲线 $mx^2 - ny^2 = 1$ ($mn > 0$) 的一条渐近线方程为 $y = \frac{1}{2}x$ ，

$$\therefore \frac{b}{a} = 2 \text{ 或 } \frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \therefore \text{双曲线的离心率为 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{5} \text{ 或 } \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

7. 【答案】C

【解析】该程序框图的功能是计算 $S = 2 + \lg \frac{1}{2} + \lg \frac{2}{3} + \cdots + \lg \frac{n}{n+1} = 2 - \lg(n+1)$ 的值.

要使输出的 S 的值为 -1 , 则 $2 - \lg(n+1) = -1$, 即 $n = 999$. 故①中应填 $n < 999$.

8. 【答案】A

【解析】由 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} \leq 2$ 可知, \overrightarrow{AP} 在 \overrightarrow{AB} 向量上的投影为 1,

所以 P 点所在位置为半个圆, 面积占整个圆的 $\frac{1}{2}$, 所以概率为 $\frac{1}{2}$.

9. 【答案】C

【解析】 $\because C_1D_1 // A_1B_1$, \therefore 异面直线 A_1B_1 与 AC_1 所成的角即为 C_1D_1 与 AC_1 所成的角 $\angle AC_1D_1$.

在 $Rt_{\triangle AC_1D_1}$ 中, $C_1D_1 = 4$, $AC_1 = \sqrt{4^2 + 2^2 + (\sqrt{5})^2} = 5$, $\therefore \cos \angle AC_1D_1 = \frac{C_1D_1}{AC_1} = \frac{4}{5}$.

10. 【答案】D

【解析】将函数 $f(x) = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x \right) = \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$ 图象上

所有点向左平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x) = 2 \sin(2x + \pi) = -2 \sin 2x$ 的图象,

令 $2x = k\pi$, 求得 $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$, 令 $k = 1$, 可得 $g(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{2}, 0 \right)$.

11. 【答案】C

【解析】由 $f(x+3) = f(x)$, 知函数 $f(x)$ 为周期函数, 且周期 $T = 3$,

则 $f(2020) = f(3 \times 673 + 1) = f(1) = f(-1) = 4$.

12. 【答案】A

【解析】由题意得 $x^2 = 2py$, 则 $F(0, \frac{p}{2})$, 所以 $|OF| = \frac{p}{2}$,

设直线 AB 的方程为 $y = kx + \frac{p}{2}$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 且 $x_1 > x_2$,

因为 $4|AF| = |BF|$ ，所以 $-4\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BF}$ ，则 $x_2 = -4x_1$ ，①

$$\text{由} \begin{cases} y = kx + \frac{p}{2} \\ x^2 = 2py \end{cases}, \text{整理得 } x^2 - 2pkx - p^2 = 0, \text{ 所以 } x_1 + x_2 = 2pk, \quad x_1x_2 = -p^2, \quad \text{②}$$

联立①②可得 $k = -\frac{3}{4}$ ，即直线 AB 的方程为 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{p}{2}$ ，

$$\text{又} \begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + \frac{p}{2} \\ x^2 = 2py \end{cases}, \text{整理得 } 2x^2 + 3px - 2p^2 = 0,$$

解得 $x = -2p$ 或 $x = \frac{p}{2}$ ，故 $A(\frac{p}{2}, \frac{p}{8})$ ， $B(-2p, 2p)$ ，

所以根据抛物线的定义可知 $|AF| = \frac{p}{8} + \frac{p}{2} = \frac{5}{8}p$ ，所以 $\frac{|AF|}{|OF|} = \frac{5}{4}$ 。

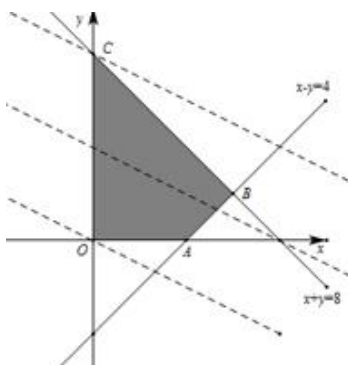
13. 【答案】140

【解析】根据题意可得抽样比为 $\frac{50}{750} = \frac{1}{15}$ ，

则这次抽样调查抽取的人数是 $\frac{1}{15}(500 + 750 + 850) = \frac{1}{15} \times 2100 = 140$ 。

14. 【答案】16

【解析】由约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 8 \\ x - y \leq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ 作出可行域如图所示：



$z = x + 2y$ 可化为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{z}{2}$. 当直线过点 $C(0,8)$ 时， z 取最大值，即 $z_{\max} = 2 \times 8 = 16$ 。

15. 【答案】 $-\frac{4}{5}$

【解析】由已知得 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ，解得 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ， $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{2}$ 。

16. 【答案】 4π

【解析】 \because 正八面体的所有棱长均为 $\sqrt{2}$ ， \therefore 外接球的直径为正八面体的体对角线长 2，

所以球的半径 $R=1$ ，故外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi$ 。

17. 【答案】 (1) $a_n = 2^n$ ；(2) $T_n = \frac{n}{2n+1}$ 。

【解析】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，由已知 $q > 0$ ，由题意得 $\begin{cases} a_1 q + a_1 q^2 = 12 \\ 3a_1 + 2a_1 q = 14 \end{cases}$ ，

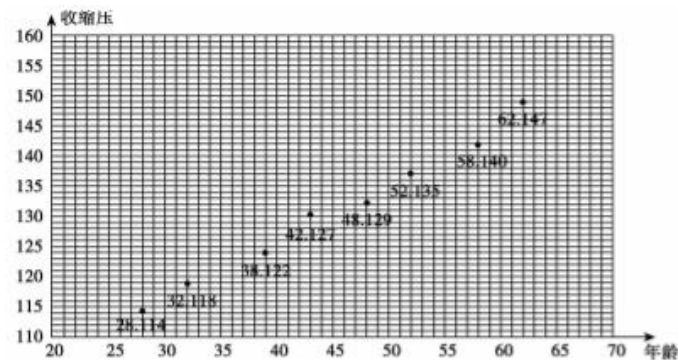
所以 $7q^2 - 5q - 18 = 0$ ，解得 $q = 2$ ， $a_1 = 2$ 。因此数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$ 。

(2) 由 (1) 知， $b_n = \frac{1}{\log_2 a_{2n+1} \log_2 a_{2n-1}} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ ，

$\therefore T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$ 。

18. 【答案】 (1) 见解析；(2) 见解析；(3) 见解析。

【解析】(1) 画出散点图如图：



(2) $\bar{x} = \frac{28+32+38+42+48+52+58+62}{8} = 45$ ，

$\bar{y} = \frac{114+118+122+127+129+135+140+147}{8} = 129$ ，

$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^8 x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{47384 - 8 \times 45 \times 129}{17232 - 8 \times 45^2} = \frac{118}{129} \approx 0.91$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 129 - 0.91 \times 45 = 88.05$ 。

\therefore 回归直线方程为 $\hat{y} = 0.91x + 88.05$ 。

(3) 根据回归直线方程的预测,

年龄为 70 岁的老人标准收缩压约为 $0.91 \times 70 + 88.05 = 151.75$ (mmHg),

$\therefore \frac{180}{151.75} \approx 1.19$, \therefore 收缩压为 180mmHg 的 70 岁老人为中度高血压人群.

19. 【答案】(1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$; (2) 见解析.

【解析】(1) 由题意可知: $2b = 4$, $b = 2$, $\frac{n}{m} = 1$, 双曲线的离心率 $e_2 = \sqrt{1 + \frac{n}{m}} = \sqrt{2}$,

则椭圆的离心率为 $e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 椭圆的离心率 $e_1 = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $a = 2\sqrt{2}$.

\therefore 椭圆的标准方程: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 设直线 MN 的方程为 $y = k(x - 4) (k \neq 0)$, $\begin{cases} y = k(x - 4) \\ x^2 + 2y^2 = 8 \end{cases}$,

消去 y 整理得: $(1 + 2k^2)x^2 - 16k^2x + 32k^2 - 8 = 0$, 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{16k^2}{2k^2 + 1}$, $x_1x_2 = \frac{32k^2 - 8}{2k^2 + 1}$,

$k_1 + k_2 = \frac{y_1}{x_1 - 2} + \frac{y_2}{x_2 - 2} = \frac{k(x_1 - 4)}{x_1 - 2} + \frac{k(x_2 - 4)}{x_2 - 2}$
 $= k \cdot \frac{(x_1 - 4)(x_2 - 2) + (x_2 - 4)(x_1 - 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} = k \cdot \frac{2x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 16}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}$

将 $x_1 + x_2 = \frac{16k^2}{2k^2 + 1}$, $x_1x_2 = \frac{32k^2 - 8}{2k^2 + 1}$,

代入上式得 $2x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 16 = 0$, 即 $k_1 + k_2 = 0$.

20. 【答案】(1) 见解析; (2) $V_{Q-PCD} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

【解析】(1) 由 $AD \parallel BC$, $AD = BC$, $AD \perp BC$ 可知, 四边形为 $ABCD$ 为正方形,
由 $\triangle PAD$ 中 $PA = PD$, $\angle APD = 60^\circ$, 所以为 $\triangle PAD$ 为等边三角形. 取 PD 得中点 O ,
连接 AO , 因为 $\triangle PAD$ 为等边三角形, 所以 $AO \perp PD$,
又因为 $AO \subset$ 平面 PAD , 平面 $PAD \cap$ 平面 PCD , 所以 $AO \perp$ 平面 PCD ,

因为 $CD \subset$ 平面 PCD , 所以 $AO \perp CD$, 因为底面 $ABCD$ 为正方形, 所以 $CD \perp AD$,
因为 $AO \cap AD = A$, 所以 $CD \perp$ 平面 PAD , 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $AB \perp$ 平面 PAD .

(2) 由 (1) 得 $AO \perp$ 平面 PCD , 所以 A 到平面 PCD 的距离 $d = AO = 2\sqrt{3}$,

因为底面 $ABCD$ 为正方形, 所以 $AB \parallel CD$,

又因为 $AB \not\subset$ 平面 PCD , 所以 $AB \parallel$ 平面 PCD ,

所以 A, B 两点到平面 PCD 的距离相等, 均为 d ,

又 Q 为线段 PB 的中点, 所以 Q 到平面 PCD 的距离 $h = \frac{d}{2} = \sqrt{3}$,

由 (1) 知, $CD \perp$ 平面 PAD , 因为 $PD \subset$ 平面 PAD , 所以 $CD \perp PD$,

$$\text{所以 } V_{Q-PCD} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle PCD} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

21. 【答案】(1) $f(x)$ 只有一个零点, 零点为 0; (2) $0 < a < 1$.

【解析】(1) 由题知: $f'(x) = 1 - e^x + ax$, 令 $g(x) = 1 - e^x + ax$, $g'(x) = a - e^x$,

当 $a \leq 0$, $g'(x) < 0$, 所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减,

因为 $f'(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 单调递减,

所以 $f(x) \leq f(0) = 0$, 故 $f(x)$ 只有一个零点, 零点为 0.

(2) 由 (1) 知: $a \leq 0$ 不合题意,

当 $0 < a < 1$ 时, 因为 $x \in (-\infty, \ln a)$, $g'(x) > 0$; $(\ln a, +\infty)$, $g'(x) < 0$;

又因为 $f'(0) = 0$, 所以 $f'(\ln a) > 0$;

又因为 $f'(-\frac{1}{a}) = -e^{-\frac{1}{a}} < 0$, 因为函数 $\varphi(a) = \ln a + \frac{1}{a}$, $\varphi'(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = \frac{a-1}{a^2} < 0$, $a \in (0, 1)$,

所以 $\varphi(a) > \varphi(1) = 1 > 0$, 及 $-\frac{1}{a} < \ln a$, 所以存在 $x_1 \in (-\frac{1}{a}, \ln a)$, 满足 $f(x_1) = 0$,

所以 $x \in (-\infty, x_1)$, $f'(x) < 0$; $x \in (x_1, 0)$, $f'(x) > 0$, $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) < 0$;

此时 $f(x)$ 存在两个极值点 $x_1, 0$, 符合题意.

当 $a = 1$ 时, 因为 $x \in (-\infty, 0)$, $g'(x) > 0$; $x \in (0, +\infty)$, $g'(x) < 0$;

所以 $g(x) \leq g(0) = 0$; 所以 $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 无极值点, 不合题意. 综上可得: $0 < a < 1$.

22. 【答案】(1) $(2, \frac{\pi}{2})$, $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$; (2) $|PA| \cdot |PB| = 4$.

【解析】(1) 由 C_1 , C_2 极坐标方程分别为 $\rho = 2\sin\theta$, $\rho\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

化为平面直角坐标系方程分为 $x^2 + (y-1)^2 = 1$, $x + y - 2 = 0$.

得交点坐标为 $(0, 2)$, $(1, 1)$. 即 C_1 和 C_2 交点的极坐标分别为 $(2, \frac{\pi}{2})$, $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$.

(2) 把直线 l 的参数方程:
$$\begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$

代入 $x^2 + (y-1)^2 = 2$, 得 $(-2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t)^2 + (\frac{1}{2}t - 1)^2 = 1$,

即 $t^2 - (2\sqrt{3} + 1)t + 4 = 0$, $t_1 t_2 = 4$, 所以 $|PA| \cdot |PB| = 4$.

23. 【答案】(1) $\{x \mid -1 \leq x \leq \frac{7}{2}\}$; (2) 2.

【解析】(1) 根据题意, 函数 $f(x) = x + 1 + |3 - x|$, $x \geq -1$.

若 $f(x) \leq 5$, 则有 $\begin{cases} x + 1 + 3 - x \leq 5 \\ -1 \leq x < 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x + 1 + x - 3 \leq 5 \\ x \geq 3 \end{cases}$, 解得 $-1 \leq x \leq \frac{7}{2}$,

故原不等式的解集为 $\{x \mid -1 \leq x \leq \frac{7}{2}\}$.

(2) 函数 $f(x) = x + 1 + |3 - x| = \begin{cases} 4, & -1 \leq x < 3 \\ 2x - 2, & x \geq 3 \end{cases}$, 分析可得 $f(x)$ 的最小值为 4, 即 $n = 4$;

则正数 a , b 满足 $8ab = a + 2b$, 即 $\frac{1}{4a} + \frac{1}{8b} = 1$,

$2a + 4b = (2a + 4b) \cdot (\frac{1}{4a} + \frac{1}{8b}) = 1 + \frac{a}{4b} + \frac{b}{a} \geq 1 + 2\sqrt{\frac{a}{4b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$. 即 $2a + 4b$ 的最小值为 2.